Тема 3. Нормальный закон распределения наработки

Нормальное распределение часто используют в тех случаях, когда отказы носят постепенный характер, являются следствием направленных физико-химических изменений в элементе.

Нормальное распределение /распределение Лапласа-Гаусса/ – распределение вероятностей непрерывной случайной величины *t* (рисунок 2.7) такое, что плотность распределения вероятностей при $-\infty < t < +\infty$ принимает действительное значение

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu_t}{\sigma}\right)^2\right], \qquad (2.29)$$

где μ_t – математическое ожидание; σ – стандартное отклонение нормального распределения.

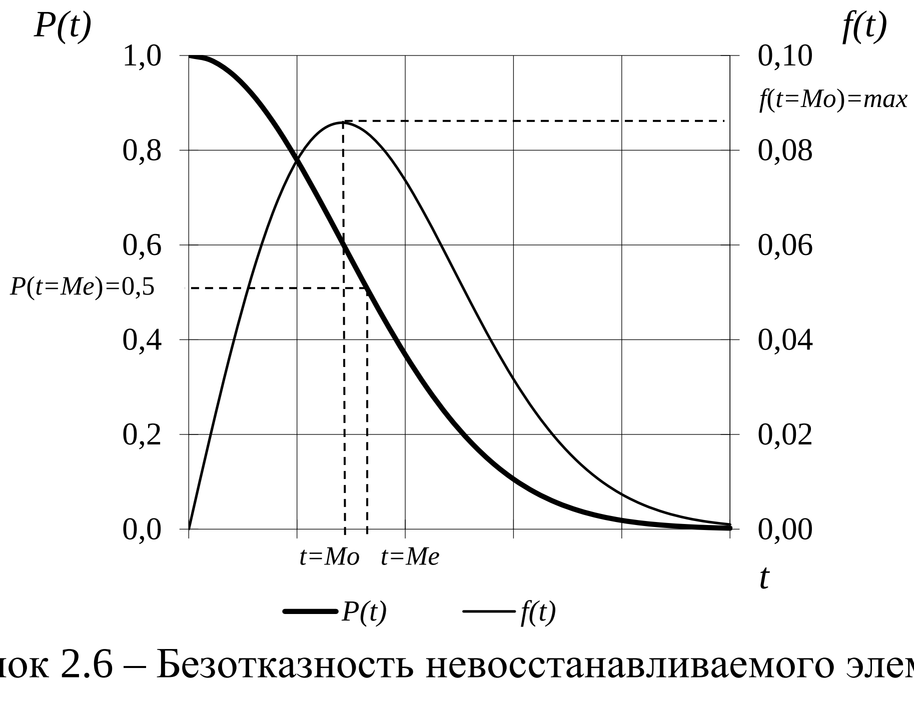


Рисунок 2.6 – Безотказность невосстанавливаемого элемента

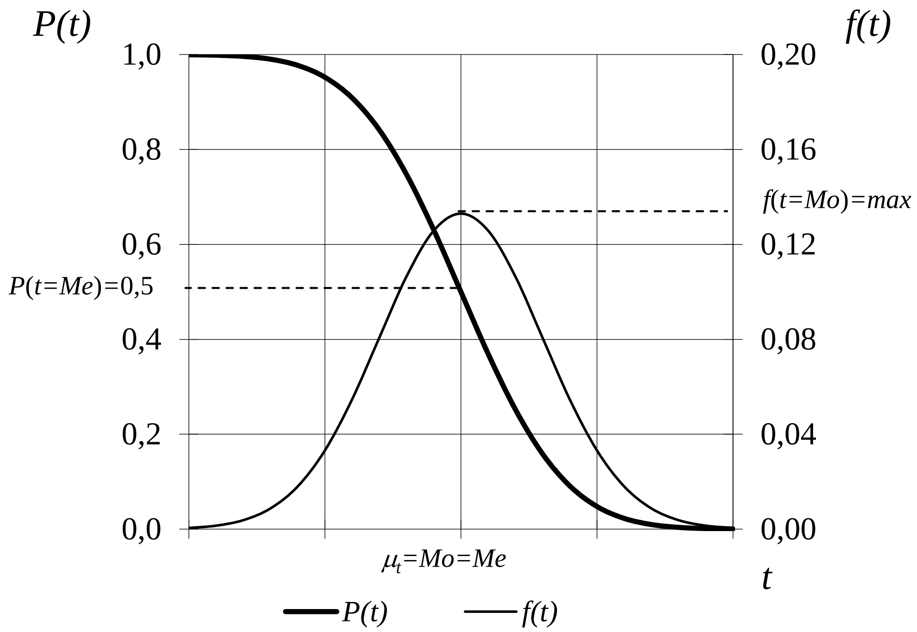


Рисунок 2.7 – Распределение нормальное (Лапласа-Гаусса)

Стандартное нормальное распределение – распределение вероятностей стандартизованной нормальной случайной величины *y*, плотность распределения которой

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{y^2}{2}\right], -\infty<y<+\infty. \tag{2.30}$$

Строго говоря, в теории надежности используется усеченное нормальное распределение с плотностью

$$f(t) = \frac{c}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu_t}{\sigma}\right)^2\right], \tag{2.31}$$

где *c* – постоянная, определяемая из условия

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = 1. \tag{2.32}$$

Обычно величина σ в несколько раз меньше μ_t. В этом случае принимают c≈1.

Для нормального распределения характерны симметричный вид кривой плотности $f(t)$, а также тождество моды *Mo*, медианы

Me и математического ожидания μ_t случайной величины *t*. Для нормальных распределений действует так называемое правило «трех сигм» (рисунок 2.8). В интервале изменения случайной величины *t* от (μ_t–3σ) до (μ_t+3σ) вероятность того, что некоторое событие произойдет, составляет

$$\int_{\mu_t-3\sigma}^{\mu_t+3\sigma} f(t)dt = 0{,}997300.$$

В таком случае допустимо ограничиться рассмотрением указанного интервала, поскольку вероятность того, что некоторое событие произойдет за его пределами, пренебрежимо мала и составляет 0,0007. При этом для интервалов [μ_t–2σ; μ_t+2σ], [μ_t–σ; μ_t+σ] соответственно справедливо:

$$\int_{\mu_t-2\sigma}^{\mu_t+2\sigma} f(t)dt = 0{,}954500; \quad \int_{\mu_t-\sigma}^{\mu_t+\sigma} f(t)dt = 0{,}682689.$$

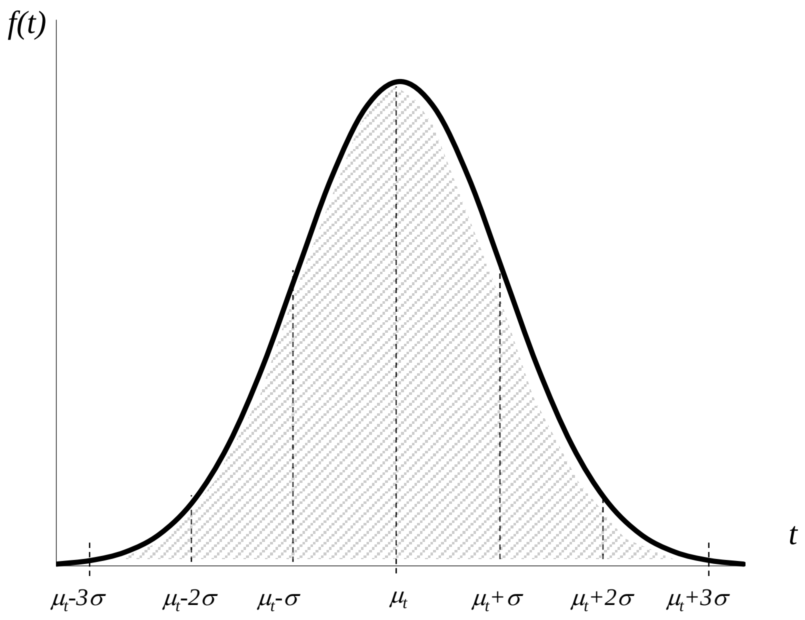
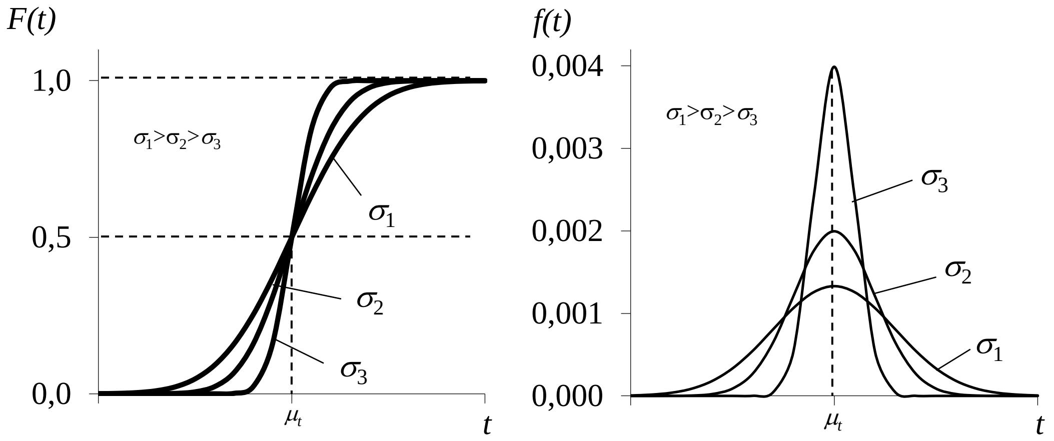


Рисунок 2.8 – Правило «трех сигм»

Форма кривой плотности нормального распределения зависит от коэффициента вариации v (рисунок 2.9), определяемого как соотношение среднеквадратического отклонения и математического ожидания случайной величины.



а) кривые функции распределения *б*) кривые плотности распределения

Рисунок 2.9 – Кривые функции и плотности нормального распределения

Для описания распределений случайной величины, отличающихся от нормального, используют другие математические модели, в частности, так называемое логарифмически нормальное распределение (рисунок 2.10).

Логарифмически нормальное распределение – распределение вероятностей непрерывной случайной величины *t*, которая может принимать любые значения от *a* до +∞ и плотность распределения вероятности которой

$$f(t) = \frac{1}{(t-a)\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{log_e(t-a)-\mu}{\sigma}\right)^2\right], \qquad (2.33)$$

где $t>a$, μ и σ – соответственно математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины $log_e(t-a)$.

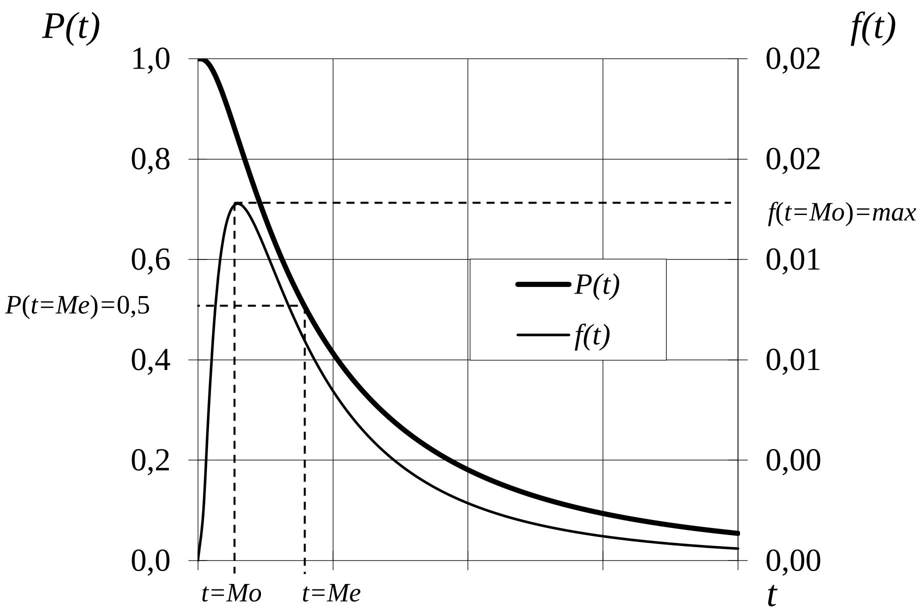


Рисунок 2.10 – Логарифмически нормальное распределение

При этом:

1) Распределение вероятностей случайной величины $log_e(t–a)$ – это нормальное распределение; μ и σ – соответственно математическое ожидание и стандартное отклонение этой случайной величины.

2) Параметры μ и σ – это не логарифмы математического ожидания и стандартного отклонения t.

3) Часто вместо обозначения log_e (или ln) используют log_{10}. В этом случае

$$f(t) = \frac{log_{10}e}{(t-a)\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{log_{10}(t-a)-\mu}{\sigma}\right)^2\right], \qquad (2.34)$$

где μ и σ – соответственно математическое ожидание и стандартное отклонение $log_{10}(t–a)$; $log_{10}e = 0,4343$.